JMS, 2022, Vol. 2 (No. 1), pp. 151-164
Jurnal Matematika & Sains
Kompleks YPP Al Fattah Siman Sekaran Lamongan

BASIS DAN DIMENSI ATAS PADA GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF

Inne Syafrian Putri[1*], Bintang Puja Rahayu[2]
[1,2]UIN Sunan Gunung Djati Bandung
Corresponding Author: *innesyafrian@uinsgd.ac.id*

Abstract

Let $Z^*(R)$ be the set of nonzero divisors of the commutative ring R. The zero divisor graph of R is $\Gamma(R)$ with the set of vertices $Z^*(R)$, where two distinct vertices x and y are neighbors if and only if $xy = 0$. The value of the upper dimension and the minimum solution set (base) of the zero divisor graph $\Gamma(R)$ is finite. The steps to find the upper dimensions and base are from the specified ring, determine the zero divisor graph of the ring, and look for a different representation of W. The set W is called the solution set if all the vertices of G have different representations of W. In this study, some theorem about upper dimensions and base of the zero divisor graph of the commutative ring are discussed.

***Keywords**: Base, Upper Dimension, Zero divisor graph, Commutative ring*

How to cite: Putri, I.S & Rahayu, B.P. (2022). Basis dan Dimensi Atas pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif. Artikel. *JMS (Jurnal Matematika dan Sains)*, *2*(1), pp.151-164.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan teori yang sudah cukup tua, namun penggunaan teori graf dan penerapannya terus berkembang. Graf adalah himpunan titik dan sisi untuk menggambarkan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Ada banyak topik yang dibahas dalam teori graf salah satunya yaitu dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 kemudian oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Konsep dimensi atas graf diperkenalkan oleh Chartrand et al (2000).

Pembagi nol dari suatu ring komutatif R merupakan elemen tak nol a di R yang menghasilkan perkalian $ab = 0$ untuk suatu elemen tak nol b di R. Dari definisi ini dikembangkan graf pembagi nol yang diperkenalkan pertama kali oleh Beck (1988) kemudian dilanjutkan oleh D.D. Anderson dan Naseer (1993). Materi graf pembagi nol diperluas oleh D.F. Anderson dan Livingston melanjutkan karya sebelumnya. Graf pembagi nol menerjemahkan sifat aljabar ring ke teori graf.

Lebih lanjut, kajian tentang basis dan dimensi atas pada graf dieksplorasi pada graf pembagi nol dari ring komutatif menjadi topik yang menarik untuk dibahas dalam penelitian ini. Penelitian dibatasi pada ring komutatif dan berhingga. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui cara menentukan basis dan dimensi atas pada graf pembagi nol dari ring komutatif.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi pustaka. Teorema yang dibahas merupakan hasil rujukan, akan tetapi pembuktiannya ditulis dengan bahasa sendiri dan lebih rinci disertai contoh yang berbeda. Penelitian ini dilakukan pada Agustus 2021 – Desember 2021.

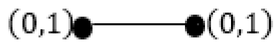
HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf pembagi nol dari ring R dilambangkan dengan $\Gamma(R)$ adalah graf tak berarah yang memiliki himpunan titik pembagi nol yang tak nol yang dilambangkan dengan $V(\Gamma(R)) = Z*(R) = Z(R)\backslash\{0\}$, dimana titik-titik berbeda x dan y bertetangga jika dan hanya jika $xy = 0$. Sebagai contoh, untuk ring $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(1,0),(1,0),(1,1)\}$ ditentukan perkalian setiap elemennya pada tabel berikut.

Tabel 1. Hasil perkalian elemen di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\times$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
(1,0)	(0,0)	**(0,0)**	(1,0)	(1,0)
(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

Terlihat dari tabel di atas bahwa elemen pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ adalah $Z^*(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4) = \{(0,1),(1,0)\}$. Karena $(0,1)\,.\,(1,0) = (0,0)$ maka titik $(0,1)$ bertetangga dengan titik $(1,0)$ pada graf pembagi nol seperti gambar berikut.



Gambar 1. Graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Berikut adalah teorema tentang diameter pada graf pembagi nol.

Teorema 1 Misalkan R adalah ring komutatif. Kemudian $\Gamma(R)$ terhubung dan $diam(\Gamma(R) \leq 3$

Bukti :

Misalkan $x, y \in Z^*(R)$ yang berbeda.

1. Jika $xy = 0$ maka $d(x,y) = 1$

2. Jadi andaikan xy bukan nol.

   a. Jika $x^2 = y^2 = 0$ maka terdapat lintasan yang menghubungkan x dengan xy dan xy dengan y. Sehingga diperoleh lintasan $x - xy - y$ dengan panjang 2 , maka $d(x, y) = 2$.

   b. Jika $x^2 = 0$ dan $y^2 \neq 0$ maka terdapat $b \in Z^*(R) - \{x, y\}$ dengan $by = 0$.

   - Jika $bx = 0$ maka terdapat lintasan yang menghubungkan b dengan x sehingga diperoleh lintasan $x - b - y$ dengan panjang 2, maka $d(x, y) = 2$.
   - Jika $bx \neq 0$ maka terdapat lintasan x dengan bx dan bx dengan y sehingga diperoleh lintasan $x - bx - y$ dengan panjang 2, maka $d(x, y) = 2$.

   c. Jika $y^2 = 0$ dan $x^2 \neq 0$ maka terdapat $b \in Z^*(R) - \{x, y\}$ dengan $bx = 0$.

   - Jika by = 0 maka terdapat lintasan yang menghubungkan b dengan y sehingga diperoleh lintasan $x - b - y$ dengan panjang 2, maka $d(x, y) = 2$.
   - Jika $by \neq 0$ maka terdapat lintasan yang menghubungkan b dengan y sehingga diperoleh lintasan $x - by - y$ dengan panjang 2, maka $d(x, y) = 2$.

Dengan demikian dapat diasumsikan bahwa xy, x^2 dan y^2 adalah bukan nol. Oleh karena itu terdapat $a, b \in Z^*(R) - \{x, y\}$ dengan $ax = by = 0$.

a. Jika $a = b$ maka diperoleh lintasan $x - a - y$ dengan panjang 2, sehingga $d(x, y) = 2$.

b. Jadi asumsikan bahwa $a \neq b$

   - Jika $ab = 0$ maka diperoleh lintasan $x - a - b - y$ dengan panjang 3, sehingga $d(x, y) \leq 3$.
   - Jika $ab \neq 0$ maka diperoleh lintasan $x - ab - y$ dengan panjang 2, sehingga $d(x, y) = 2$.

   Dengan demikian $\Gamma(R)$ adalah terhubung karena terdapat lintasan yang menghubungan titik x dengan titik y dan $diam(\Gamma(R) \leq 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $\Gamma(R)$ adalah lintasan, maka $|Z^*(R)| \leq 3$

Teorema 2 Jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan sehingga $\Gamma(R)$ adalah lintasan, maka $|Z^*(R)| \leq 3$

Bukti :

Dari Teorema 1 diperoleh $\Gamma(R)$ terhubung dan $diam(\Gamma(R)) \leq 3$. Jadi $\Gamma(R)$ tidak dapat berupa lintasan yang panjangnya lebih dari 4.

Jika memungkinkan misalkan $|Z^*(R)| = 4$. Untuk membentuk R, dimana graf pembagi nol $\Gamma(R)$ adalah lintasan, misalnya seperti $a - b - c - d$ sedemikian sehingga $ab = bc = cd = 0$ adalah satu-satunya relasi pembagi nol.

a. Perhatikan bahwa $a + c \in Z(R)$ karena $b(a + c) = ba + bc = 0) = 0$
   - $a + c \neq a$ karena $c \neq 0$ begitupun $a + c \neq c$ karena $a \neq 0$
   - $bd \neq 0$ karena tidak bertetangga sehingga $a + c \neq d$
   - $d(a + c) = da + dc = da + 0 = da \neq 0$

   Oleh karena itu $a + c \neq 0$

   Jadi $a + c = b$

b. Perhatikan bahwa $b + d \in Z(R)$, karena $c(b + d) = cb + cd = 0 + 0 = 0$
   - Karena $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ maka $b + d \neq b$ dan $b + d \neq d$
   - $ac \neq 0$ karena tidak bertetangga sehingga $b + d \neq a$
   - $a(b + d) = ab + ad = 0 + ad = ad \neq 0$ arena titik a dan titik d tidak bertetangga.

   Sehingga $b + d \neq 0$. Jadi $b + d = c$ atau $b = c - d$

   Dari uraian sebelumnya, $b = a + c$, sehingga

   $a + c = b = c - d$

   $a = -d$

Namun hal ini kontradiksi karena $ac \neq 0$ tetapi $-dc = 0$. Jadi $|Z^*(R)| = 4$ tidak mungkin.

Misalkan G graf terhubung pada n titik. Untuk suatu titik $v \in V(G)$, representasi $r(v|W)$ untuk v terhadap suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots w_k\}$ dari titik-titik G adalah tupel- k yang didefinisikan sebagai

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$$

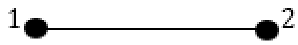
dimana $d(x, y)$ menyatakan jarak antara dua titik x dan y dari graf G. Representasi untuk titik $ke - i$ di W memiliki 0 pada koordinat $ke - i$ dan semua koordinat lainnya bukan nol. Jadi titik dari W tentu memiliki representasi yang berbeda, sehingga titik di luar W yang perlu diperiksa apakah representasinya berbeda atau tidak.

Himpunan W disebut himpunan penyelesaian jika semua titik dari G memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Himpunan penyelesain W disebut himpunan penyelesaian minimal jika tidak ada subset sejati dari W yang merupakan himpunan penyelesaian dari G.

Himpunan penyelesaian minimal dengan jumlah titik terkecil disebut himpunan penyelesaian minimum atau basis metrik untuk G. Kardinalitas atau jumlah titik dalam basis metrik disebut dimensi metrik G, yang dilambangkan dengan $\dim(G)$.

Himpunan penyelesaian minimal dengan jumlah titik terbesar disebut basis atas dari G dan kardinalitasnya disebut dimensi atas yang dilambangkan dengan $dim^{+}(G)$.
Untuk graf pada n titik, setiap himpunan bagian dari $(n-1)$ titik adalah himpunan penyelesaian. Jadi, untuk sembarang graf terhubung G, $dim^{+}(G) \leq (n-1)$.

Berikut contoh dari dimensi atas dan basis dari graf lintasan P_2 dan P_3



Gambar 2. Graf P_2

Misalkan $W_1 = \{1\}$

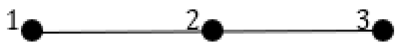
$r(2|\, W_1) = d(2,1) = 1$

Misalkan $W_2 = \{2\}$

$r(1|W) = d(1,2) = 1$

$\dim(P_2) = 1$

$dim^{+}(P_2) = 1$



Gambar 3. Graf P_3

Misalkan $W_1 = \{1\}$

$r(2|W_1) = d(2,1) = 1$

$r(3|W_1) = d(3,1) = 2$

W_1 himpunan penyelesaian minimal

Misalkan $W_2 = \{2\}$

$r(1|W_2) = d(1,2) = 1$

$r(3|W_2) = d(3,2) = 1$

W_2 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_3 = \{3\}$

$r(1|\ W_3) = d(1,3) = 2$

$r(2|\ W_3) = d(2,3) = 1$

W_3 himpunan penyelesaian minimal

Misalkan $W_4 = \{1,2\}$

$r(3|W_4) = \big(d(3,1), d(3,2)\big) = (2,1)$

W_4 himpunan penyelesaian tetapi tidak subset sejatinya $W_1 = \{1\}$ juga himpunan penyelesaian , sehingga W_4 bukan himpunan penyelesaian minimal.

Misalkan $W_5 = \{1,3\}$

$r(2|W_5) = \big(d(2,1), d(2,3)\big) = (1,1)$

W_5 himpunan penyelesaian tetapi tidak subset sejatinya $W_1 = \{1\}$ dan $W_3 = \{1\}$ juga himpunan penyelesaian , sehingga W_5 bukan himpunan penyelesaian minimal.

Misalkan $W_6 = \{2,3\}$

$r(1|W_6) = \big(d(1,2), d(1,3)\big) = (1,2)$

W_4 himpunan penyelesaian tetapi tidak subset sejatinya $W_3 = \{3\}$ juga himpunan penyelesaian , sehingga W_6 bukan himpunan penyelesaia n minimal.

Basis metrik dan basis atas dari P_3 adalah $W_1 = \{1\}$ dan $W_3 = \{1\}$ sehingga diperoleh $\dim(P_3) = 1$ dan $dim^+(P_3) = 1$

Teorema 3 Untuk graf terhubung G orde $n \geq 1$, $dim^+(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \cong P_2$ atau P_3 dan untuk $n \geq 4$, $dim^+(P_n) = 2$, di mana P_n menyatakan lintasan pada n titik.

Bukti :

- Misalkan G isomorfik dengan P_2 dan P_3. Berdasarkan contoh diatas maka $dim^+(P_2) = dim^+(P_3) = 1$
- Sebaliknya, misalkan G adalah graf dengan n titik dan $dim^+(G) = 1$. Misalkan himpunan basisnya adalah $W = \{v_1\}$. Karena semua titik memiliki representasi yang berbeda terhadap W, terdapat titik $v_2, v_3, \dots, v_n \in V(G)$, sehingga $d(v_2, v_1) =$

$1, d(v_3, v_1) = 2, \ldots, d(v_n, v_1) = n - 1$, akibatnya G adalah graf lintasan $P_n = v_1 v_2 \ldots, v_i v_{i+1} \ldots v_n$.

- Jika $n \geq 4$, maka sebarang himpunan dua titik $W_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ yang tidak memuat titik ujung v_1 atau v_n akan membentuk himpunan penyelesaian minimal (basis), karena $r(v_j | W_i) = (i - j, i - j + 1), 1 \leq j \leq i$ dan $r(v_k) = (k - i, k - i - 1), i + 1 \leq k \leq n$. Jelas, representasi ini adalah berbeda, karena jika $(i - j, i - j + 1) = (k - i, k - i - 1)$ maka $i - j = k - i \leftrightarrow k + j = 2i$ dan $i - j + 1 = k - i - 1 \leftrightarrow k + j = 2i + 2$, suatu kontradiksi. Juga, jelas tidak ada sub himpunan sejati dari $\{v_i, v_{i+1}\}$ yang membentuk himpunan penyelesaian. Jadi $dim^+(P_n) \geq 2$ untuk semua $n \geq 4$

- Akhirnya, misalkan $W = \{v_i, v_{i+k}\}, k \geq 1$ menjadi subset dua titik dari $P_n, n \geq 4$. Maka $r(v_a) = (i - a, i + k - a)$, untuk $1 \leq a \leq i$; $r(v_b) = (b - i, i + k - b)$, untuk $i < b \leq i + k$ dan $r(v_c) = (c - i, c - k - i)$, untuk $i + k < c \leq n$.
- Jelas, masing-masing representasi ini berbeda, karena jika $r(v_a) = r(v_b)$, maka $a = b$, kontradiksi, jika $r(v_a) = r(v_c)$ maka $a + c = 2(k + i) = 2i$ yang menghasilkan $k = 0$ sebuah kontradiksi. Jika $r(v_b) = r(v_c)$ maka $b = c$,kontradiksi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $dim^+(P_n) = 2, \forall\, n \geq 4$
- Jadi jika $dim^+(G) = 1$ maka G isomorfik dengan P_2 aatau P_3

Teorema 4 Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Maka $dim^+(\Gamma(R))$ berhingga jika dan hanya jika R berhingga (dan bukan domain).

Bukti :

- Jika R berhingga, maka $|Z^*(R)|$ berhingga dan oleh karena itu $dim^+(\Gamma(R))$ berhingga.
- Sekarang, anggaplah $dim^+(\Gamma(R))$ berhingga. Misalkan W menjadi himpunan basis atas dengan $|W| = k$, di mana k adalah bilangan bulat positif. Untuk dua titik x dan y dari $\Gamma(R)$, $d(x, y) \in \{0,1,2,3\}$ berdasarkan teorema 1. Sekarang, untuk setiap titik $x \in Z^*(R)$, direpresentasikan $r(x|W)$ adalah $k-$ vektor koordinat $d_1, d_2, \ldots, d_k$, dimana $d_i \in \{0,1,2,3\}, 1 \leq i \leq k$. Karena setiap d_i memiliki empat kemungkinan, maka jumlah total kemungkinan untuk $r(x|W)$ adalah 4^k. Karena W adalah

himpunan penyelesaian, maka $r(x|W)$ adalah unik untuk setiap titik $x \in Z^*(R)$ sehingga $|Z^*(R)| \leq 4^k$. . Ini menyiratkan bahwa $Z^*(R)$ berhingga dan karenanya R berhingga.

Perhatikan bahwa $dim^+(\Gamma(G))$ berhingga jika dan hanya jika R berhingga, misalkan $dim^+(\Gamma(G)) = k$ dan misalkan $W = w_1, w_2, \dots, w_k\}$, sebagai basis atas. Karena setiap koordinat $r(x|W)$ bukan untuk $x \in V(\Gamma(R) - W$, kita melihat bahwa setiap koordinat dalam $r(x|W)$ termasuk dalam himpunan$\{1,2,3\}$, sebagai $diam(\Gamma(G)) \leq 3$. Oleh karena itu$||Z^*(R)| \leq 3^k + k$.

Sebagai contoh dari graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$, ditentukan dimensi atas dan basisnya.
Perhatikan hasil perkalian dari elemen ring $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ diberikan pada tabel berikut.

Tabel 2 Hasil perkalian elemen di $\mathbb{Z}_{10}$

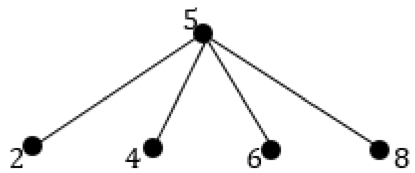
×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	**0**	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	**0**	4	8	2	6
5	0	5	**0**	5	**0**	5	**0**	5	**0**	5
6	0	6	2	8	4	**0**	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	**0**	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Dipeoleh himpunan pembagi nolnya $Z^*(\mathbb{Z}_{10}) = (2,4,5,6,8)$
Titik 2 bertetangga dengan titik 5 karena $2 . 5 = 0$

Titik 4 bertetangga dengan titik 5 karena $4 . 5 = 0$

Titik 6 bertetangga dengan titik 5 karena $6 . 5 = 0$

Titik 8 bertetangga dengan titik 5 karena $8 . 5 = 0$



Gambar 4. Graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{10}$

Dari Gambar diatas diperoleh

Misalkan $W_1 = \{2\}$

$r(4|W_1) = d(4,2) = 2$

$r(5|W_1) = d(5,2) = 1$

$r(6|W_1) = d(6,2) = 2$

$r(8|W_1) = d(8,2) = 2$

W_1 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_2 = \{4\}$

$r(2|W_2) = d(2,4) = 2$

$r(5|W_2) = d(5,4) = 1$

$r(6|W_2) = d(6,4) = 2$

$r(8|W_2) = d(8,4) = 2$

W_2 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_3 = \{5\}$

$r(2|W_3) = d(2,5) = 1$

$r(4|W_3) = d(4,5) = 1$

$r(6|W_3) = d(6,5) = 1$

$r(8|W_3) = d(8,5) = 1$

W_3 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_4 = \{6\}$

$r(2|W_4) = d(2,6) = 2$

$r(4|W_4) = d(4,6) = 2$

$r(5|W_4) = d(5,6) = 1$

$r(8|W_4) = d(8,6) = 2$

W_4 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_5 = \{8\}$

$r(2|W_5) = d(2,8) = 2$

$r(4|W_5) = d(4,8) = 2$

$r(5|W_5) = d(5,8) = 1$

$r(6|W_5) = d(6,8) = 2$

W_5 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_6 = \{2,4\}$

$r(5|W_6) = \big(d(5,2), d(5,4)\big) = (1,1)$

$r(6|W_6) = \big(d(6,2), d(6,4)\big) = (2,2)$

$r(8|W_6) = \big(d(8,2), d(8,4)\big) = (2,2)$

W_6 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_7 = \{2,5\}$

$r(4|W_7) = \big(d(4,2), d(4,5)\big) = (2,1)$

$r(6|W_7) = \big(d(6,2), d(6,5)\big) = (2,1)$

$r(8|W_7) = \big(d(8,2), d(8,5)\big) = (2,1)$

W_7 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_8 = \{2,6\}$

$r(4|W_8) = \big(d(4,2), d(4,6)\big) = (2,2)$

$r(5|W_8) = \big(d(5,2), d(5,6)\big) = (1,1)$

$r(8|W_8) = \big(d(8,2), d(8,6)\big) = (2,2)$

W_8 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_9 = \{2,8\}$

$r(4|W_9) = \big(d(4,2), d(4,8)\big) = (2,2)$

$r(5|W_9) = \big(d(5,2), d(5,8)\big) = (1,1)$

$r(6|W_9) = \big(d(6,2), d(6,8)\big) = (2,2)$

W_9 bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{10} = \{4,5\}$

$r(2|W_{10}) = \big(d(2,4), d(2,5)\big) = (2,1)$

$r(6|W_{10}) = \big(d(6,4), d(6,5)\big) = (2,1)$

$r(8|W_{10}) = \big(d(8,4), d(8,5)\big) = (2,1)$

W_{10} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{11} = \{4,6\}$

$r(2|W_{11}) = \big(d(2,4), d(2,6)\big) = (2,2)$

$r(5|W_{11}) = \big(d(5,4), d(5,6)\big) = (1,1)$

$r(8|W_{11}) = \big(d(8,4), d(8,6)\big) = (2,2)$

W_{11} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{12} = \{4,8\}$

$r(2|W_{12}) = \big(d(2,4), d(2,8)\big) = (2,2)$

$r(2|W_{12}) = \big(d(2,4), d(2,8)\big) = (2,2)$

$r(2|W_{12}) = \big(d(2,4), d(2,8)\big) = (2,2)$

W_{12} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{13} = \{5,6\}$

$r(2|W_{13}) = \big(d(2,5), d(2,6)\big) = (1,2)$

$r(4|W_{13}) = \big(d(4,5), d(4,6)\big) = (1,2)$

$r(8|W_{13}) = \big(d(8,5), d(8,6)\big) = (1,2)$

W_{13} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{14} = \{5,8\}$

$r(2|W_{14}) = \big(d(2,5), d(2,8)\big) = (1,2)$

$r(4|W_{14}) = \big(d(4,5), d(4,8)\big) = (1,2)$

$r(6|W_{14}) = \big(d(6,5), d(6,8)\big) = (1,2)$

W_{14} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{15} = \{6,8\}$

$r(2|W_{15}) = \big(d(2,6), d(2,8)\big) = (2,2)$

$r(4|W_{15}) = \big(d(4,6), d(4,8)\big) = (2,2)$

$r(5|W_{15}) = \big(d(5,6), d(5,8)\big) = (1,1)$

W_{15} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{16} = \{2,4,5\}$

$r(6|W_{16}) = (d(6,2), d(6,4), d(6,5)) = (2,2,1)$

$r(8|W_{16}) = (d(8,2), d(8,4), d(8,5)) = (2,2,1)$

W_{16} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{17} = \{2,4,6\}$

$r(5|W_{17}) = (d(5,2), d(5,4), d(5,6)) = (1,1,1)$

$r(8|W_{17}) = (d(8,2), d(8,4), d(8,6)) = (2,2,2)$

W_{17} himpunan penyelesaian minimal

Misalkan $W_{18} = \{2,4,8\}$

$r(5|W_{18}) = (d(5,2), d(5,4), d(5,8)) = (1,1,1)$

$r(6|W_{18}) = (d(6,2), d(6,4), d(6,8)) = (2,2,2)$

W_{18} himpunan penyelesaian minimal

Misalkan $W_{19} = \{2,5,6\}$

$r(4|W_{19}) = (d(4,2), d(4,5), d(4,6)) = (2,1,2)$

$r(8|W_{19}) = (d(8,2), d(8,5), d(8,6)) = (2,1,2)$

W_{19} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{20} = \{2,5,8\}$

$r(4|W_{20}) = (d(4,2), d(4,5), d(4,8)) = (2,1,2)$

$r(6|W_{20}) = (d(6,2), d(6,5), d(6,8)) = (2,1,2)$

W_{20} bukan himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{21} = \{2,6,8\}$

$r(4|W_{20}) = (d(4,2), d(4,6), d(4,8)) = (2,2,2)$

$r(5|W_{20}) = (d(5,2), d(5,6), d(5,8)) = (1,1,1)$

W_{21} himpunan penyelesaian

Misalkan $W_{22} = \{2,4,5,6\}$

$r(8|W_{22}) = (d(8,2), d(8,4), d(8,5), d(8,6)) = (2,2,1,2)$

W_{22} himpunan penyelesaian tetapi tidak minimal

Misalkan $W_{23} = \{2,4,5,8\}$

$r(6|W_{23}) = (d(6,2), d(6,4), d(6,5), d(6,8)) = (2,2,1,2)$

W_{23} himpunan penyelesaian tetapi tidak minimal

Misalkan $W_{24} = \{2,4,6,8\}$

$r(5|W_{24}) = (d(5,2), d(5,4), d(5,6), d(5,8)) = (1,1,1,1)$

W_{24} himpunan penyelesaian tetapi tidak minimal

Misalkan $W_{25} = \{2,5,6,8\}$

$r(4|W_{25}) = (d(4,2), d(4,5), d(4,6), d(4,8)) = (2,1,2,2)$

W_{25} himpunan penyelesaian tetapi tidak minimal

Misalkan $W_{26} = \{4,5,6,8\}$

$r(2|W_{26}) = (d(2,4), d(2,5), d(2,6), d(2,8)) = (2,1,2,2)$

W_{26} himpunan penyelesaian minimal

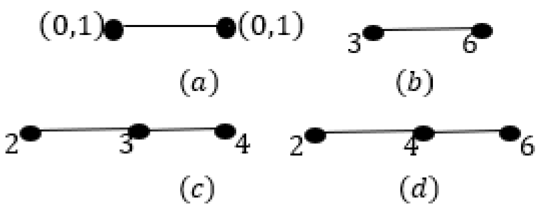
Basis metrik dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ adalah $W_{17} = \{2,4,6\}, W_{18} = \{2,4,8\}$, dan $W_{21} = \{2,6,8\}$ sehingga diperoleh $\dim(\mathbb{Z}_{10}) = 3$, sementara basis atas dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ adalah $W_{26} = \{4,5,6,8\}$, sehingga diperoleh $dim^{+}(\mathbb{Z}_{10}) = 4$.

Teorema 5 Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Maka $dim^{+}(\Gamma(R)) = 1$ jika dan hanya jika R adalah salah satu ring berikut.

i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_9$

ii) $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8$

Bukti :



Gambar 5 (a) $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ (b) $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ (c) $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ (d) $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$

Jika $\Gamma(R)$ isomorfik dengan P_2 atau P_3 maka $dim^{+}(\Gamma(R)) = 1$. Hasilnya mengikuti Teorema 3.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Untuk membuat graf pembagi nol langkahnya yaitu menentukan ring yang diberikan, menentukan pembagi nol dari ring tersebut, menentukan ketetanggaan dari graf pembagi nol dan menggambarnya. Sementara untuk menentukan basis dari graf pembagi nol dimulai dari menentukan jarak antara satu titik ke titik lainnya, membuat representasi titik terhadap himpunan penyelesaian, dan menentukan himpunan penyelesaian minimum dari graf pembagi nol.

Untuk menentukan dimensi atas dari graf pembagi nol dari ring komutatif langkah langkahnya sama dengan mencari basis tetapi kardinalitasnya yang paling besar.

Saran

Pembahasan mengenai dimensi atas dan basis pada graf pembagi nol dari ring komutatif yang dikaji pada penelitian ini hanya mengenai graf pembagi nol dari ring komutatif. Masalah mengenai dimensi atas dan basis masih terus berkembang, misalnya mengkaji dimensi atas dan basis pada graf lain seperti graf helm, graf roda, graf tangga, dan graf lainnya

DAFTAR RUJUKAN

A. Ardiansyah, "Total k-defisiensi Titik pada Graf Bipartisi Komplit Km,n", Skripsi, Jur. Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, Indonesia, 2015.

Bondy, J. A., & Murty, *Graph Theory with Applications.* Ontario: Departement of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, 1976.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. Graphs and Digraphs Second Edition. California: a Division of Wadsworth, Inc.

D.D. Anderson, M. Naseer, Beck's coloring of a commutative ring, J. Algebra 159 (1993) 500–517.

D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*

F. *Harary, R.A. Melter, On the metric dimension of a graph, Ars Combin. 2 (1976) 191–195*

G. Chartrand, C. Poisson, P. Zhang*, Resolvability and the upper dimension of graphs*, Int. J. Comput. Math. Appl. 39 (2000) 19–28.

Herstein,LN (1999). Topic In Algebra, Secon edition , Newyork: John Wiles and Sons

I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra 116 (1988) 208–226

Munir,Renaldi.2005.*Matematika Diskrit.*Bandung.Informatika

P.J. Slater, Leaves of trees, Congr. Number. 14 (1975) 549–559

Rasiman.dkk. 2018. *Teori Ring.* Semarang. UNIV PGRI Semarang Press

S. Pirzada, M. Aijaz. S.P Redmond, *Upper dimension and bases of zero-divisor graphs of commutative rings,* AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. 2019

S.Pirzada, M.Aijaz, S.P.Redmond, *On upper dimension of graphs and their bases sets,* Discrete Mathematics Letters, 3 (2020) 37–43

Soleha. Setyowati, Dian W. A.W Satrio, "Kajian Sifat – Sifat Graf Pembagi-Nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan", *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2015 ISBN No. 978-979-028-728-0,* Surabaya, 2015