JMS, 2022, Vol. 02 (No. 02), pp. 217-222
Jurnal Matematika & Sains
Kompleks YPP Al Fattah Siman Sekaran Lamongan

TITIK TETAP REICH DI DALAM RUANG *b*-METRIK

Ahmad Khairul Umam[1*], Krisna Adilia Daniswara[2],
[1, 2] Program Studi Matematika Universitas Billfath
Corresponding Author: *aku.ahmad.umam@gmail.com[*]*

Abstract

Problem of linear equation, integral equation, and differential equation can be solved with a fixed point. One of generalization of metric space is b-metric space. This article discusses a lemma, a theorem and an example in b-metric space. We discuss a theorem about uniqueness and existence of fixed point.

Keywords*: b-Metric Space; Fixed Point*

How to cite: Ahmad Khairul Umam & Krisna Adilia Daniswara. (2022). Titik Tetap Reich di Dalam Ruang *b*-Metrik. *JMS (Jurnal Matematika dan Sains)*, 02(02), pp.217-222.

PENDAHULUAN

Banyak peneliti matematika di bidang analisis yang meneliti tentang topik ruang dan perluasannya. Pada mata kuliah analisis real atau analisis fungsional dibahas tentang ruang metrik. Topik tentang ruang metrik saat ini banyak perluasannya seperti ruang *b*-metrik, (kerucut) *cone*, parsial, dan lain-lain. Disini dibahas tentang ruang *b*-metrik yaitu perluasan suatu ruang yaitu ruang metrik. Aksioma ketaksamaan segitiga di ruang *b*-metrik berbeda dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang metrik.

Beberapa peneliti, menambahkan syarat ketaksamaan segitiga yang lain di ruang *b*-metrik dengan koefisien matriks [1], membuktikan suatu teorema berkaitan dengan titik tetap dalam suatu *b*-metrik menggunakan operator Picard lemah(*weak*) [2], membuktikan perluasan teorema titik tetap Hardy dan Reich di ruang *b*-metrik [3]. Penelitian ini memberikan bukti contoh 2.1, membuktikan lemma 2.1, dan memberikan penjelasan yang lebih banyak untuk pembuktian di teorema 3.1 (perluasan teorema titik tetap Reich) [3].

Definisi. [4] Diberikan himpunan tidak kosong X dimana $s \geq 1$ merupakan suatu bilangan real. Diberikan juga fungsi $b: XxX \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dikatakan *b*-metrik apabila untuk setiap $x, y, z \in X$ terpenuhi:

B1. $b(x,y) = 0$ jhj $x = y$;

B2. $b(x,y) = b(y,x)$;

B3. $b(x,z) \leq s\big(b(x,y) + b(y,z)\big)$.

Ruang (X, b) merupakan ruang *b*-metrik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1. [5] Diberikan suatu ruang metrik (X, d) yang lengkap dimana d adalah metrik. Selanjutnya diberikan fungsi $f: X \longrightarrow X$ dengan

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha d\big(x, f(x)\big) + \beta d\big(y, f(y)\big) + \gamma d(x, y) \tag{1}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan α, β dan γ merupakan bilangan tak negatif sehingga $\alpha + \beta + \gamma < 1$, oleh karena itu fungsi f memiliki titik tetap tunggal.

Lemma. [3] Suatu ruang *b*-metrik (X, b) dimana $s \geq 1$ dan barisan $\langle u_n \rangle$ di X sedemikian sehingga $b(u_n, u_{n+1}) \leq \delta b(u_{n-1}, u_n)$ untuk $n = 2,3, \dots$ dimana $0 \leq \delta < 1$ dan $s.\delta < 1$ maka $\langle u_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di X.

Bukti

Untuk $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$b(u_n, u_{n+1}) \leq \delta b(u_{n-1}, u_n) \leq \cdots \leq \delta^n b(u_0, u_1).$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga di ruang *b*-metrik, untuk $n < m$ berlaku

$$\begin{aligned}
b(u_n, u_m) &\leq s\big(b(u_n, u_{n+1}) + b(u_{n+1}, u_m)\big) \\
&= sb(u_n, u_{n+1}) + sb(u_{n+1}, u_m) \\
&\leq sb(u_n, u_{n+1}) + s\Big(s\big(b(u_{n+1}, u_{n+2}) + b(u_{n+2}, u_m)\big)\Big) \\
&= sb(u_n, u_{n+1}) + s^2 b(u_{n+1}, u_{n+2}) + s^2 b(u_{n+2}, u_m) \\
&\leq sb(u_n, u_{n+1}) + s^2 b(u_{n+1}, u_{n+2}) \\
&\quad + s^3 b(u_{n+2}, u_{n+3}) + \cdots + s^{m-n-1} b(u_{m-2}, u_{m-1}) \\
&\quad + s^{m-n-1} b(u_{m-1}, u_m) \\
&\leq sb(u_n, u_{n+1}) + s^2 b(u_{n+1}, u_{n+2}) \\
&\quad + s^3 b(u_{n+2}, u_{n+3}) + \cdots + s^{m-n-1} b(u_{m-2}, u_{m-1}) \\
&\quad + s^{m-n} b(u_{m-1}, u_m) \\
&\leq s\delta^n b(u_0, u_1) + s^2 \delta^{n+1} b(u_0, u_1) + s^3 \delta^{n+2} b(u_0, u_1) + \cdots \\
&\quad + s^{m-n-1} \delta^{m-2} b(u_0, u_1) + s^{m-n} \delta^{m-1} b(u_0, u_1) \\
&= s\delta^n \big(1 + s\delta + \cdots + (s\delta)^{m-n-1}\big) b(u_0, u_1)
\end{aligned}$$

untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\begin{aligned}
b(u_n, u_m) &\leq s\delta^n \big(1 + s\delta + \cdots + (s\delta)^{m-n-1}\big) b(u_0, u_1) \\
&= s\delta^n \big(1 + s\delta + (s\delta)^2 + \cdots\big) b(u_0, u_1) = \left(\frac{s\delta^n}{1 - s\delta}\right) b(u_0, u_1) = 0.
\end{aligned}$$

Jadi barisan $\langle u_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Contoh. Diberikan ruang $l^p = \{\langle u_n \rangle \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p < \infty\}$ untuk $0 < p < 1$ dan fungsi $b: l^p \times l^p \to \mathbb{R}$ untuk $b(x,z) \leq 2^{\frac{1}{p}}\big(b(x,y), b(y,z)\big)$ dimana $b(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ dengan $u_n = x, v_n = y, w_n = z \in l^p$. Ruang (l^p, b) merupakan suatu ruang *b*-metrik.

Bukti

B1. ($\Rightarrow$) Karena $b(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$ untuk $0 < p < 1$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p = 0$. Selanjutnya $|u_1 - v_1|^p = 0, |u_2 - v_2|^p = 0, \ldots$. Kemudian didapatkan $|u_1 - v_1| = 0, |u_2 - v_2| = 0, \ldots,$. Oleh karena itu $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, dan seterusnya. Jadi $x = u_n = \{u_1, u_2, \ldots\} = \{v_1, v_2, \ldots\} = v_n = y$.

($\Leftarrow$) Diketahui $x = u_n = \{u_1, u_2, \ldots\} = \{v_1, v_2, \ldots\} = v_n = y$ sehingga $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, dan seterusnya. Jadi $b(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (|u_1 - v_1|^p + |u_2 - v_2|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = (|u_1 - v_1|^p + |u_2 - v_2|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = (|0|^p + |0|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = 0$ untuk $0 < p < 1$.

B2. $b(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = b(x,y)$ untuk setiap $x = u_n, y = v_n \in l^p$ dimana $0 < p < 1$.

B3. Berdasarkan aksioma ruang metrik disebutkan bahwa $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ atau

$$b(x,z) \leq t\big(b(x,y) + b(y,z)\big) \tag{2}$$

dimana $t = 1$. Jelas bahwa jika $t > 1$ pada (2) menjadikan ketaksamaan tersebut juga terpenuhi. Untuk $b(x,z) \leq 2^{\frac{1}{p}}\big(b(x,y) + b(y,z)\big)$, nilai p mendekati 0 dari kanan berakibat nilai $2^{\frac{1}{p}}$ menjadi ∞, maka $b(x,z) \leq 2^{\frac{1}{p}}\big(b(x,y) + b(y,z)\big)$ berlaku. Sedangkan untuk $b(x,y) \leq 2^{\frac{1}{p}}\big(b(x,y) + b(y,z)\big)$, nilai p mendekati 1 dari kiri berakibat nilai $2^{\frac{1}{p}}$ menjadi 2, sehingga $b(x,z) \leq 2^{\frac{1}{p}}\big(b(x,y) + b(y,z)\big)$ juga berlaku. Oleh karena itu $b(x,z) \leq 2^{\frac{1}{p}}\big(b(x,y) + b(y,z)\big)$ dimana $0 < p < 1$.

Teorema 2. Diberikan suatu ruang yaitu *b*-metrik yang lengkap (X, b) dengan $s \geq 1$ dimana b adalah *b*-metrik. Selanjutnya diberikan fungsi $f: X \longrightarrow X$ dengan

$$b\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha b\big(x, f(x)\big) + \beta b\big(y, f(y)\big) + \gamma b(x,y) \tag{3}$$

dimana setiap $x, y \in X$, bilangan α, β dan γ merupakan bilangan-bilangan tak negatif sehingga $\alpha + s(\beta + \gamma) < 1$ untuk $s \geq 1$, oleh karena itu fungsi f memiliki titik tetap tunggal.

Bukti

Misalkan diambil $u_0 \in X$ kemudian dibangun suatu barisan $\langle u_n \rangle$ di X dengan suku-suku barisan

$$u_0, u_1 = f(u_0), \dots, u_n = f^n(u_0).$$

Berdasarkan (3), Kemudian ditunjukkan barisan $\langle u_n \rangle$ adalah Cauchy.

$$\begin{aligned} b(u_{n+1}, u_n) &= b\big(f(u_n), f(u_{n-1})\big) \\ &\leq \alpha b\big(u_n, f(u_n)\big) + \beta b\big(u_{n-1}, f(u_{n-1})\big) + \gamma b(u_n, u_{n-1}) \\ &= \alpha b(u_n, u_{n+1}) + \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_n, u_{n-1}) \end{aligned}$$

bisa ditulis

$$b(u_{n+1}, u_n) \leq \alpha b(u_n, u_{n+1}) + \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_n, u_{n-1})$$

$$b(u_{n+1}, u_n) - \alpha b(u_n, u_{n+1}) \leq \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_n, u_{n-1})$$

$$b(u_n, u_{n+1}) - \alpha b(u_n, u_{n+1}) \leq \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_{n-1}, u_n)$$

$$b(u_n, u_{n+1})(1 - \alpha) \leq (\beta + \gamma) b(u_{n-1}, u_n)$$

$$b(u_n, u_{n+1}) \leq \frac{\beta + \gamma}{1 - \alpha} . b(u_{n-1}, u_n)$$

misalkan $\delta = \frac{\beta+\gamma}{1-\alpha}$, maka

$$b(u_n, u_{n+1}) \leq \left(\frac{\beta + \gamma}{1 - \alpha}\right) b(u_{n-1}, u_n) = \delta b(u_{n-1}, u_n) \leq \cdots \leq \delta^n b(u_0, u_1).$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga di ruang *b*-metrik dan lemma, untuk $n, m > 0$ dan $n < m$ maka barisan $\langle u_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Karena ruang (X, b) adalah riuang *b*-metrik yang lengkap maka semua barisan Cauchy di dalam ruang tersebut konvergen, anggap $u_n \to x$. Selanjutnya ditunjukkan x merupakan titik tetap fungsi f.

$$\begin{aligned} b\big(x, f(x)\big) &\leq s\Big(b(x, u_n) + b\big(u_n, f(x)\big)\Big) \\ &= s\Big(b(x, u_n) + b\big(f(u_{n-1}), f(x)\big)\Big) \\ &= s\big(b(x, u_n) + b(f(x), f(u_{n-1})\,)\big) \\ &\leq s\Big(b(x, u_n) + \alpha b\big(x, f(x)\big) + \beta b\big(u_{n-1}, f(u_{n-1})\big) + \gamma b(x, u_{n-1})\Big) \\ &= s b(x, u_n) + s\alpha b\big(x, f(x)\big) + s\beta b\big(u_{n-1}, f(u_{n-1})\big) + s\gamma b(x, u_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= sb(x,u_n) + s\alpha b\big(x,f(x)\big) + s\beta b(u_{n-1},u_n) + s\gamma b(x,u_{n-1})$$

bisa ditulis

$$b\big(x,f(x)\big) \leq sb(x,u_n) + s\alpha b\big(x,f(x)\big) + s\beta b(u_{n-1},u_n)$$
$$+ s\gamma b(x,u_{n-1})$$
$$b\big(x,f(x)\big) - s\alpha b\big(x,f(x)\big) \leq sb(x,u_n) + s\beta b(u_{n-1},u_n) + s\gamma b(x,u_{n-1})$$
$$b\big(x,f(x)\big)(1-s\alpha) \leq s\big(b(x,u_n) + \beta b(u_{n-1},u_n) + \gamma b(x,u_{n-1})\big)$$
$$b\big(x,f(x)\big) \leq \frac{s}{1-s\alpha}.\big(b(x,u_n) + \beta b(u_{n-1},u_n) + \gamma b(x,u_{n-1})\big)$$

untuk $n \to \infty$ berlaku

$$b\big(x,f(x)\big) \leq \left(\frac{s}{1-s\alpha}\right)\big(b(x,u_n) + \beta b(u_{n-1},u_n) + \gamma b(x,u_{n-1})\big)$$
$$b\big(x,f(x)\big) = 0$$

sehingga titik x disebut titik tetap.

Misalkan x dan y merupakan titik tetap dimana $f(x) = x$ dan $f(y) = y$, jadi

$$b(x,y) = b\big(f(x),f(y)\big) \leq \alpha b\big(x,f(x)\big) + \beta b\big(y,f(y)\big) + \gamma b(x,y)$$
$$= \alpha b(x,x) + \beta b(y,y) + \gamma b(x,y) = \gamma b(x,y)$$

karena γ merupakan bilangan tak negatif maka hal tersebut kontradiktif, jadi terbukti fungsi f mempunyai titik tetap tunggal.

SIMPULAN DAN SARAN

Suatu fungsi f dimana $f: X \to X$ akan mempunyai titik tetap, juga titik tetapnya tunggal pada ruang metrik jika memenuhi persamaan (1) dengan $\alpha + \beta + \gamma < 1$, sedangkan di ruang *b*-metrik dengan memenuhi $\alpha + s(\beta + \gamma) < 1$. Saran untuk penelitian selanjutnya menerapkan teorema titik tetap di ruang *b*-metrik guna mencari solusi dari persamaan differensial, persamaan linear, dan persamaan integral.

DAFTAR RUJUKAN

[1] Boriceanu, M. (2009). Fixed Point Theory on Spaces with Vector-Valued *b* Metrics. *Demonstratio Mathematica, 42*(4), 825-835.

[2] Petre, R. I. & Bota, M. (2013). Fixed Point Theorems on Generalized *b*-Metric Spaces. *Publ. Math. Debrecen, 83* (1-2), 139-159.

[3] Mishra, P. K., Sachdeva, S., & Banerjee, S. K. (2014). Some Fixed Point Theorems in *b*-

Metric Spaces. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2*(1), 19-22.

[4] Agrawal, S., Qureshi, K., & Nema, J. (2016). A Fixed Point Theorem for *b*-Metric Space. *International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences, 9*(1), 45-50.

[5] Reich, S. (1971). Some Remarks Concerning Contraction Mappings. *Canad. Math. Bull., 14*(1), 121-124.

NB: aku.ahmad.umam@gmail.com, krisnaadiliadaniswara@gmail.com