JMS, 2023, Vol. 03 (No. 01), pp. 39-44
Jurnal Matematika & Sains
Kompleks YPP Al Fattah Siman Sekaran Lamongan

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP BERSAMA DI RUANG METRIK *CONE* (KERUCUT) UNTUK PASANGAN FUNGSI EKSPANSIF

Indah Saniatur Rohma[1*], Ahmad Khairul Umam[2]
[1,2]Universitas Billfath
Corresponding Author: *indahsaniaturrohmah@gmail.com**

Abstract

The metric space is one of the most important designs in the field of functional analysis. In 2007 Huang and Zhang introduced the concept of a metric space into a cone metric space. They have proved several fixed point theorems for contraction functions using cone normality. The aim of this study is to examine the singularity of the common fixed points in the cone metric space for pairs of expansive functions. This research was conducted using the literature study method, namely by analyzing and outlining the designs already available in the literature. Furthermore, from this study it can be proven that the onto (surjective) function that satisfies the contractive condition in the cone metric space has a single fixed point together.

Keywords: Cone Metric Space, Fixed Point Theorem, Expansive Function

How to cite:Indah Saniatur Rohma & Ahmad Khairul Umam.(2023). Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap Bersama Di Ruang Metrik *Cone* (Kerucut) untuk Pasangan Fungsi Ekspansif. *JMS (Jurnal Matematika Dan Sains)*, 03(01), pp39-44.

PENDAHULUAN

Seiring berkembangnya zaman, banyak sekali topik matematika khususnya dalam bidang analisis fungsional yang mengalami perluasan. Misalnya pada konsep ruang metrik sudah banyak dikembangkan seperti ruang mertik *quasi*, ruang metrik kerucut *(cone)*, dan lain sebagainya.

Pada tahun 2007, Huang dan Zhang memperkenalkan konsep ruang metrik kerucut. Mereka telah membuktikan beberapa teorema titik tetap untuk fungsi kontraktif menggunakan normalitas kerucut. Hasil yang digeneralisasikan oleh Sh. Rezapour dengan menghilangkan asumsi normalitas pada kerucut, yaitu tonggak sejarah dalam ruang metrik kerucut. Banyak penulis telah mempelajari teorema titik tetap dalam ruang seperti itu. Dalam penelitian selanjutnya, diperkenalkan kelas multifungsi baru dan memperoleh perbaikan yang unik. (Tiwari dkk, 2013)

Tujuan dari skripsi ini adalah untuk menganalisis keberadaan dan ketunggalan titik tetap untuk pasangan fungsi ekspansif yang ditentukan pada ruang metrik kerucut.

E ISSN 2775-0671
P ISSN 2775-2631

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode studi literatur yaitu dengan menganalisis dan menguraikan rancangan-rancangan yang sudah tersedia di dalam literatur.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 1

Diketahui himpunan X tidak kosong. Suatu jarak (metrik) pada X adalah fungsi d dari $X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1) $d(p,q) \geq 0$, untuk setiap $p,q \in X$.
2) $d(p,q) = 0$, jika dan hanya jika $p = q$.
3) $d(p,q) = d(q,p)$, untuk setiap $p,q \in X$.
4) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$, untuk setiap $p,q,r \in X$

Suatu ruang metrik adalah pasangan (X,d), dengan X himpunan tidak kosong dan d adalah metrik pada X. Anggota ruang metrik disebut titik *(point)*. Bilangan $d(x,y)$ disebut jarak dari titik x ke titik y. (Muslikh, 2012)

Definisi 2

Suatu barisan (x_n) di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$ (Muslikh, 2012).

Teorema 1

Jika barisan (x_n) dalam (X,d) konvergen maka limit barisannya tunggal. (Soemantri, 1988).

Definisi 3

Barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy bila, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $\forall m,n \geq N$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. (Umam, 2021)

Definisi 4

Ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. (Umam, 2021)

Definisi 5

Misalkan ruang metrik (X,d). Fungsi $f: E \to E$ disebut fungsi kontraksi jika terdapat bilangan real k dengan $0 \leq k < 1$ sehingga berlaku

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y), \qquad \forall x,y \in X$$

(Kreyszig,1978)

Definisi 6

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Sebuah fungsi $f : X \to X$ pada (X, d) sedemikian rupa sehingga

$$\forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$$

disebut fungsi ekspansif (atau ekspansi). (Markin, 2019)

Definisi 7

Suatu titik tetap dari fungsi $f : X \to X$ adalah titik $x \in X$ dimana

$$f(x) = x.$$

(Kreyszig,1978)

Definisi 8

Diberikan E merupakan ruang Banach dan $P \subseteq E$. P disebut *cone* jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$(a1)$. P tertutup, $P \neq \emptyset$, dan $P \neq \bar{0}$;

$(a2)$. $a, b \in \mathbb{R}^+$ dan $x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$;

$(a3)$. $x \in P$ dan $-x \in P \Rightarrow x = \bar{0}$.

(Akbar dkk, 2016)

Definisi 9

Diberikan X suatu himpunan tak kosong. Misalkan pemetaan $d_p : X \times X \to E$, sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi:

$(c1)$. $d_p(x, y) \geq \bar{0}$;

$(c2)$. $d_p(x, y) = \bar{0}$ jika dan hanya jika $x = y$;

$(c3)$. $d_p(x, y) = d_p(y, x)$;

$(c4)$. $d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(y, z)$.

Pemetaan d_p disebut metrik *cone* pada X dan (X, d_p) disebut ruang metrik *cone*. (Akbar dkk, 2016)

Teorema 2

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik kerucut (*cone*) lengkap dan pemetaan $f: X \to X$ memenuhi syarat kontraktif

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

untuk semua $x, y \in X$, dimana $k \in [0,1)$ adalah konstanta. Kemudian, f memiliki titik tetap yang tunggal di X. Untuk setiap $x \in X$, barisan iteratif $\{f^n x\}_{n \geq 1}$ konvergen ke titik tetap tersebut.

Bukti :

Untuk setiap $x_0 \in X$ dan $n \geq 1$, ditentukan $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$ dan $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$. Kemudian,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1})$$
$$\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Jadi untuk $n > m$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m)$$
$$\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Diberikan $0 < c$ dan Pilih $N > 0$ sehingga $c + N \subseteq P$, dimana $N = \{y \in E: \|y\| < N\}$. Juga, pilih bilangan asli N_1 sehingga $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \in N$, untuk semua $m \geq N_1$. Kemudian, $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) < c$, untuk semua $m \geq N_1$. Jadi,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) < c$$

untuk semua $n > m$. Oleh karena itu, $\{x_n\}_{n \geq 1}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d). Karena (X, d) adalah ruang metrik kerucut lengkap, terdapat $x^* \in X$ sedemikian rupa sehingga $x_n \rightarrow x^*$. Pilih bilangan asli N_2 sehingga $(x_n, x^*) < \frac{c}{2}$, untuk semua $n \geq N_2$. Karena itu,

$$d(f(x^*), x^*) \leq d(f(x_n), f(x^*)) + d(f(x_n), x^*) \leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \leq$$
$$d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c,$$

untuk semua $n \geq N_2$. Jadi, $d(f(x^*), x^*) < \frac{c}{m}$, untuk semua $m \geq 1$. Dimana $\frac{c}{m} \rightarrow 0$ (untuk $m \rightarrow \infty$) dan P adalah tertutup, $-d(f(x^*), x^*) \in P$. Tapi, $d(f(x^*), x^*) \in P$ oleh karena itu, $d(f(x^*), x^*) = 0$, dan $f(x^*) = x^*$.

Teorema 3

Diberikan (X, d) adalah ruang metrik kerucut (*cone*) dan misalkan $f_1, f_2 : X \rightarrow X$ adalah sebarang dua fungsi *onto* (surjektif) yang memenuhi kondisi kontraktif

$$d(f_1(x), f_2(y)) \geq Kd(x, y)$$

untuk semua $x, y \in X$ dimana $K > 1$ adalah konstanta, maka f_1 dan f_2 memiliki titik tetap tunggal bersama di X.

Bukti:

Jika $f_1(x) = f_2(y)$ maka

$$0 \geq Kd(x, y) \Rightarrow 0 = d(x, y) \Rightarrow x = y$$

Jadi, f_1 adalah fungsi injektif (satu-satu). didefinisikan $G_1 = {f_1}^{-1}$

$$d(x,y) \geq Kd({f_1}^{-1}(x), {f_1}^{-1}(y))$$

$$\frac{1}{K} d(x,y) \geq d({f_1}^{-1}(x), {f_1}^{-1}(y))$$

$$= d(G_1(x), G_1(y))$$

Jadi, $d(G_1(x), G_1(y)) \leq \; hd(x,y)$ dimana $h = \frac{1}{K} < 1$. Berdasarkan teorema 2 G_1 mempunyai sebuah titik tetap yang tunggal x^* di X yaitu $G_1(x^*) = x^* \Rightarrow {f_1}^{-1}(x^*) = x^* \Rightarrow x^* = f_1(x^*)$ Sehingga, x^* adalah titik tetap f_1 . Demikian pula dapat ditetapkan bahwa $x^* = f_2(x^*)$, oleh karena itu $x^* = f_1(x^*) = f_2(x^*)$. Jadi x^* adalah titik tetap bersama dari pasangan fungsi f_1 dan f_2 .

Akibat

Diberikan (X, d) adalah ruang metrik kerucut (*cone*) dan misalkan $f_1, f_2 : X \to X$ adalah sebarang dua fungsi *onto* (surjektif) yang memenuhi kondisi

$$d({f_1}^{2n+1}(x), {f_2}^{2n+2}(y)) \geq Kd(x,y) \qquad (2)$$

untuk semua $x, y \in X$ dimana $K > 1$ adalah konstanta, maka f_1 dan f_2 memiliki titik tetap bersama di X.

SIMPULAN DAN SARAN

Ruang metrik *cone* merupakan perluasan dari ruang metrik. Fungsi d dalam ruang metrik didefinisikan sebagai $d: X \times X \to \mathbb{R}$. Sedangkan di ruang metrik *cone* fungsi d didefinisikan sebagai $d: X \times X \to E$ dimana E adalah ruiang banach. Range dari ruang metrik cone adalah ruang Banach. Ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap, lengkap disini memiliki arti bahwa barisan cauchynya konvergen. Ruang bernorma adalah ruang vektor dengan norna tertentu. Selanjutnya dari penelitian ini dapat dibuktikan bahwa pemetaan kontraktif pada ruang metrik *cone* memiliki titik tetap yang tunggal dan juga dapat dibuktikan bahwa fungsi *onto* (surjektif) yang memenuhi kondisi kontraktif pada ruang metrik cone memiliki titik tetap tunggal bersama. Pembahasan ruang metrik *cone* dapat dikembangkan lagi misalnya pembahasan tentang teorema titik tetap pada ruang metrik *cone* parsial serta sifat-sifatnya.

DAFTAR RUJUKAN

Akbar, S., M. Kiftiah dan Yudhi. 2016. Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik *Cone*. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)* 5(2) . 261-266.

Guang, H.L., dan Z. Xian. 2007. Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of

Contractive Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 332(2).Elsevier : 1468-1476.

Karyati dan D.U. Wutsana.2007. Masalah Norm Minimum Pada Ruang Hilbert Dan Aplikasinya. *Pythagoras*. 3(1) . 1-14

Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley and Sons.

Markin, M.V. dan E. S. Sichel. 2019. On Expansive Mappings. *Mathematics*. 7 (1004) . 1-10.

Muslikh, M. 2012. *Analisis Real*. Malang : UB Press.

Soemantri, R. 1990. *Analisis Real I*. Jakarta : PT Karunika.

Tiwari, S. K., R. P. Dubey dan A. K. Dubey. 2013. Cone Metric Space and Some Fixed Point Result for Pair of Expansive Mappings. *Gen. Math. Notes* 19(2). icsrs publication : 1-9.

Umam, A. K. 2021. *Mata Kuliah Analisis Real*. Banten : Yayasan Pendidikan dan Sosial Indonesia Maju (YPSIM) Banten.